

Aprobado y (cuando)

Indicar claramente apellido y número de padrón en cada hoja que entregue. Todas las respuestas deben estar debidamente justificadas. No se aceptarán cálculos dispersos, poco claros o sin comentarios.

EL EXAMEN SE APRUEBA CON 3 EJERCICIOS BIEN RESUELTOS

Nombre y Apellido:

Padrón:

1. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x, \frac{1}{3}x^2 - y)$.
- Hallar la línea de campo que pasa por $(x_0, y_0) = (3, 1)$.
 - Graficar en un mismo gráfico la curva obtenida en el ítem anterior y $\vec{F}(x_0, y_0)$.
2. Hallar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la curva de ecuaciones $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ y $x + 2z = 3$.
3. Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (\sqrt{2+x^4} - y^2, x^2 + \sqrt{2+y^4})$ a lo largo del perímetro de la región plana $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, |x| \leq y\}$. Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.
4. a) Hallar el volumen de $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq \frac{z^2}{9}\}$.
- b) Definir momento de inercia respecto del eje x de un sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ con densidad volumétrica $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ρ integrable en M y M un conjunto elemental de \mathbb{R}^3 .
5. Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = (e^{y+z}, e^{x+z}, e^{x+y})$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $x^2 + z^2 = 2$ y $x + y + z = 2$. Indicar en un gráfico la orientación utilizada.

① Sea el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x, \frac{1}{3}x^2 - y)$

a) Hallar la línea de campo que pasa por $(x_0, y_0) = (3, 1)$

$\vec{F}(x,y) = (\bar{F}_1, \bar{F}_2)$, para hallar las líneas de campo halla:

$$\frac{dx}{\bar{F}_1} = \frac{dy}{\bar{F}_2} \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{\frac{x^2}{3} - y} \rightarrow (x^2 - y) dx = x dy$$

$$\rightarrow \overbrace{\left(\frac{x^2}{3} - y\right)}^P dx + \overbrace{(-x)}^Q dy = 0$$

Si $P'_y = Q'_x$ entonces tengo una ec. dif. exacta y tendría que \vec{F} es conservativo, pues $\vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ pues sus componentes son suma algebraica de polinomios y además está definida en \mathbb{R}^2 , $\text{dom}(\vec{F}) = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ simplemente conexo.

$$\begin{matrix} P'_y = -1 \\ Q'_x = -1 \end{matrix} \rightarrow \text{son} = \therefore \vec{F} \text{ es campo conservativo} \rightarrow \vec{F} = \nabla \varphi \rightarrow \text{busca la función potencial}$$

$$\nabla \varphi = (P, Q)$$

$$\begin{cases} P = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x^2}{3} - y & \xrightarrow{\text{integral en } x} \varphi(x,y) = \frac{1}{9}x^3 - xy + \alpha y \\ Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x & \text{①} \end{cases}$$

$$\downarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x + \alpha' y \stackrel{\text{①}}{=} -x \rightarrow \alpha' y = 0 \rightarrow \alpha y = C$$

\therefore la función potencial es $\varphi(x,y) = \frac{x^3}{9} - xy + C$ $C \in \mathbb{R}$

La solución general de la ec. diferencial exacta es: $\frac{x^3}{9} - xy = K$

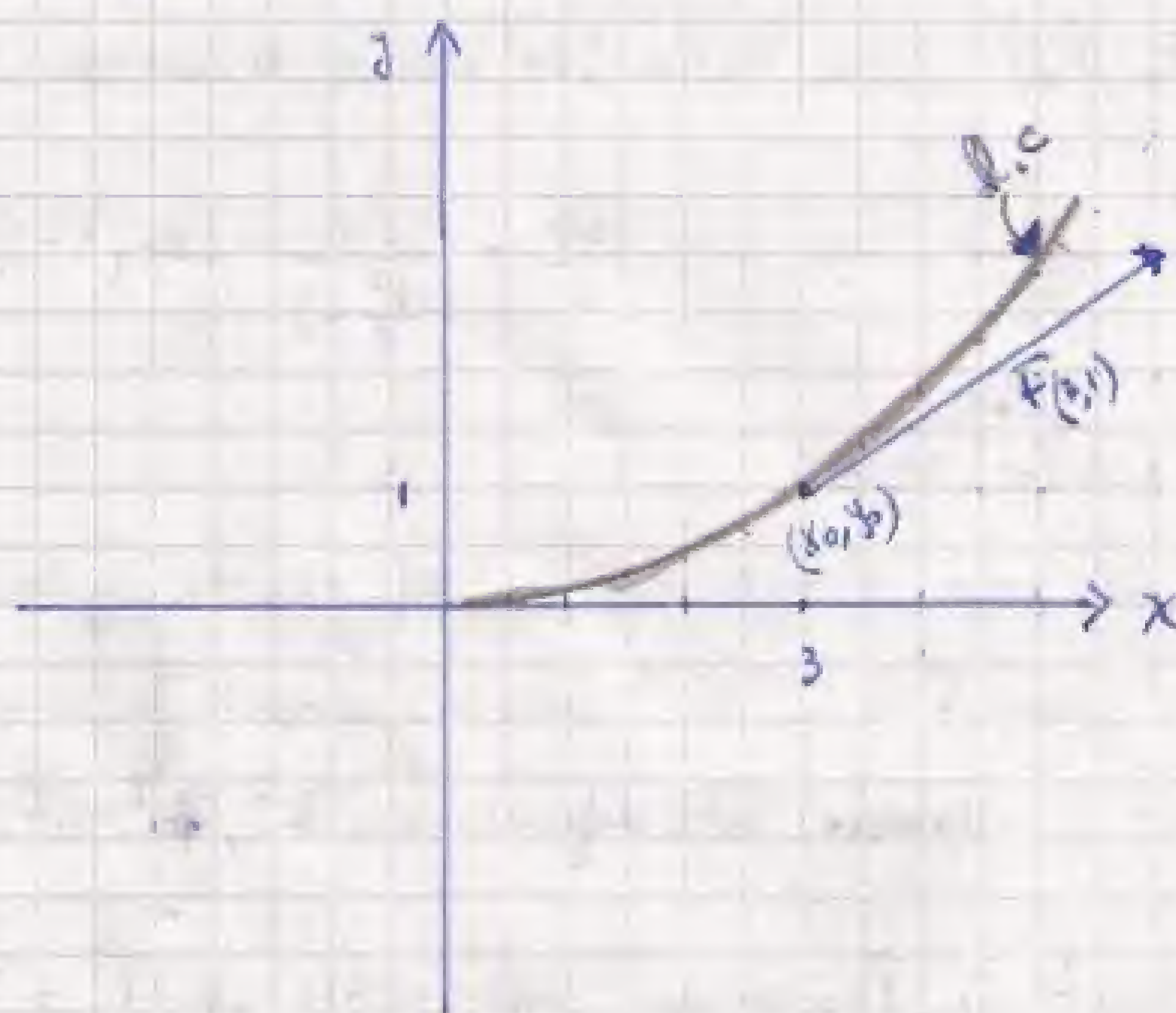
La l. de c. que pasa por $(x_0, y_0) = (3, 1) \rightarrow x=3$
 $y=1 \rightarrow \frac{3^3}{9} - 3 = \boxed{K=0}$

O sea, la l. de c. es: $\frac{x^3}{9} - xy = 0 \rightarrow \frac{x^3}{9} = xy$ Para entorno $x \neq 0 \rightarrow x \neq 0$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{9}}$$

b) Graficar en un mismo gráfico la curva obtenida en el ítem anterior y $\bar{F}(x_0, y_0)$

l.c.: $y = \frac{x^2}{9}$, $\bar{F}(3, 1) = (3, 2)$



② Hallar los extremos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la curva de ecuaciones

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \wedge \quad x+2z=3$$

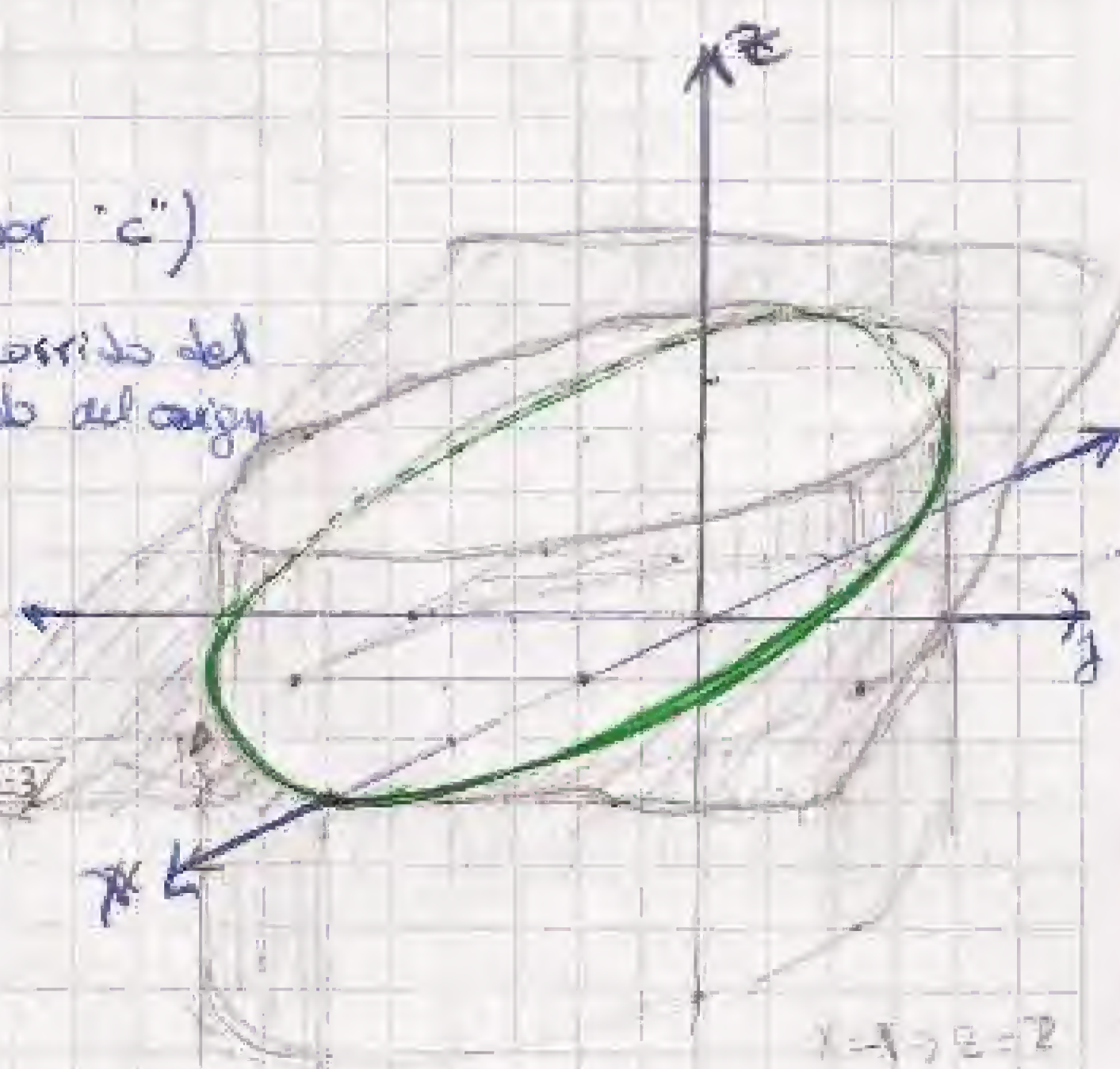
Voy a analizar la curva dada (la voy a llamar "c")

$$C = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \rightarrow \text{cilindro elíptico corrido del eje } z \text{ (o sea, corrido del origen de coord.)} \\ x+2z=3 \rightarrow \text{un plano inclinado} \end{cases}$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1 \rightarrow \text{en } z=0 \text{ describe una elipse con } a=2 \text{ y } b=\sqrt{5} \text{ con centro en } (1,0,0)$$



$$x+2z=3 \rightarrow x=3-2z$$



$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow z=2 \\ x=3 &\rightarrow z=0 \\ x=0 &\rightarrow z=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

~~Por lo tanto~~

$z = \frac{3-x}{2}$. Para parametrizar la curva tengo en cuenta que pertenece a un cilindro, por lo tanto voy a utilizar coord. cilíndricas.

$$\vec{r}(t) = (a \cos(t)+1, b \sin(t), z) \quad , \text{ con } a=2 \text{ y } b=\sqrt{5} \quad , \quad z = \frac{3-x}{2}$$

$$\begin{aligned} \cdot x &= 2 \cos(t)+1 \\ \cdot y &= \sqrt{5} \sin(t) \end{aligned} \rightarrow z = \frac{3-x}{2} = \frac{3-(2 \cos(t)+1)}{2} = \frac{3-2 \cos(t)-1}{2} = \frac{2-2 \cos(t)}{2} = 1 - \cos(t) = z$$

$$C: \vec{r}(t) = \left(\underbrace{2 \cos(t)+1}_x, \underbrace{\sqrt{5} \sin(t)}_y, \underbrace{1 - \cos(t)}_z \right) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Ahora evalúo f en los puntos de la curva C :

$$\text{Sea } h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } h(t) = f(\vec{r}(t)) = \underbrace{(2 \cos(t)+1)^2}_{x^2} + \underbrace{(\sqrt{5} \sin(t))^2}_{y^2} + \underbrace{(1 - \cos(t))^2}_{z^2}$$

Busco los P.C. de $h(t)$:

1) Extremos de la parametrización $\rightarrow t=0$ y $t=2\pi$

$$PC_1 = \vec{r}(0) = (3, 0, 0) \quad , \quad \vec{r}(2\pi) = (3, 0, 0) = PC_2$$

2) Busco los puntos donde se anula la derivada de $h(t)$

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t)+1, \sqrt{5}\sin(t), 1-\cos(t))$$

2. cont

$$\begin{aligned} h(t) &= (2\cos(t)+1)^2 + (\sqrt{5}\sin(t))^2 + (1-\cos(t))^2 = \\ &= (4\cos^2(t) + 4\cos(t) + 1) + (5\sin^2(t)) + (1 - 2\cos(t) + \cos^2(t)) = \\ &= 5\cos^2(t) + 5\sin^2(t) + 2\cos(t) + 2 = 5(\underbrace{\cos^2(t) + \sin^2(t)}_1) + 2\cos(t) + 2 = \\ &= 2\cos(t) + 7 \end{aligned}$$

$$h'(t) = -2\sin(t)$$

$$h'(t) = 0 \rightarrow -2\sin(t) = 0 \rightarrow \underbrace{t = 0 \quad \vee \quad t = 2\pi}_{\Rightarrow PC_1 = (3, 0, 0)} \quad \vee \quad t = \pi$$

$$\vec{r}(\pi) = \boxed{(-1, 0, 2) = PC_2}$$

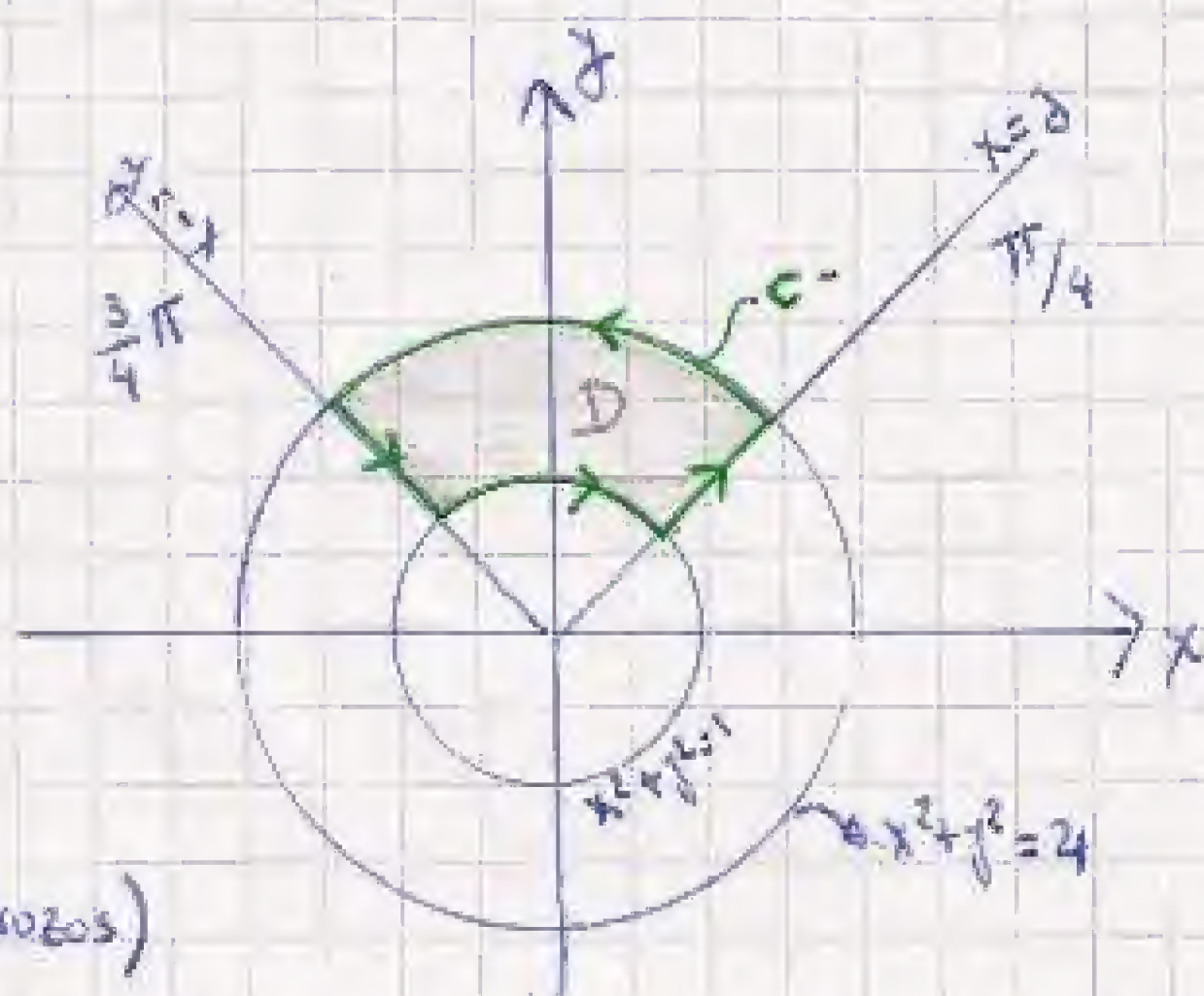
Como C es un conjunto compacto (cerrado y acotado) se puede utilizar el teorema de Weierstrass por lo que se asegura que exista, al menos, un máximo y un mínimo absolutos. Entonces, evalúo f en los puntos críticos hallados y deudo extremos según el valor de f .

$$\left. \begin{aligned} f(PC_1) &= f(3, 0, 0) = 9 \\ f(PC_2) &= f(-1, 0, 2) = 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &f \text{ alcanza su máximo absoluto en } (3, 0, 0) \\ &f \text{ alcanza su mínimo absoluto en } (-1, 0, 2) \end{aligned}$$

- ③ Calcular la circulación del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (\sqrt{2+x^4-y^2}, x^2+\sqrt{2+y^4})$ a largo del perímetro de la región plana $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, |x| \leq y\}$. Indicar en un gráfico el sentido elegido para calcular la circulación.

Voy a analizar la forma de D :

$$\begin{cases} 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 & : \text{anillo entre circ. de radios 1 y 2} \\ |x| \leq y & : x \leq y \text{ y } -x \leq y \end{cases}$$



Como D es una región compacta cuyo

borde es una curva c , cerrada y suave (a trozos)

y $\vec{F} = (P, Q) \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow$ pues P y Q son polinomios con raíces donde sus raíces son $\neq 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Entonces puedo utilizar el teorema de Green pues se cumplen sus hipótesis:

$$\oint_{ct} \vec{F} d\vec{e} = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy = \iint_D (2x + 2y) dx dy = 2 \iint_D (x+y) dx dy$$

Por la forma de D conviene hacer un cambio de variable donde

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases} \text{ con } t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \text{ , } 1 \leq r \leq 2 \text{ , jacobiano} = r$$

$$\begin{aligned} \therefore \oint_{ct} \vec{F} d\vec{e} &= 2 \iint_D (x+y) dx dy \stackrel{\substack{\text{C. variable} \\ \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{4}}} = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_1^2 (r \cos(t) + r \sin(t)) dr dt = \\ &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{r^2}{2} (\cos(t) + \sin(t)) \right]_1^2 dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos(t) + \sin(t)) \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 dt = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos(t) + \sin(t)) \frac{7}{3} dt = \\ &= \frac{14}{3} \cdot (\sin(t) - \cos(t)) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \boxed{\frac{14\sqrt{2}}{3} = \oint_{ct} \vec{F} d\vec{e}} \end{aligned}$$

④ a) Hallar el volumen de $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 2; \frac{x^2}{4} + y^2 \leq \frac{z^2}{9}\}$

Análisis la forma del volumen (la sup. frontera)

$$\bullet \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 2 \rightarrow \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{18} = 1$$

elipsoide $\begin{cases} a = \sqrt{8} \\ b = \sqrt{2} \\ c = \sqrt{18} \end{cases}$

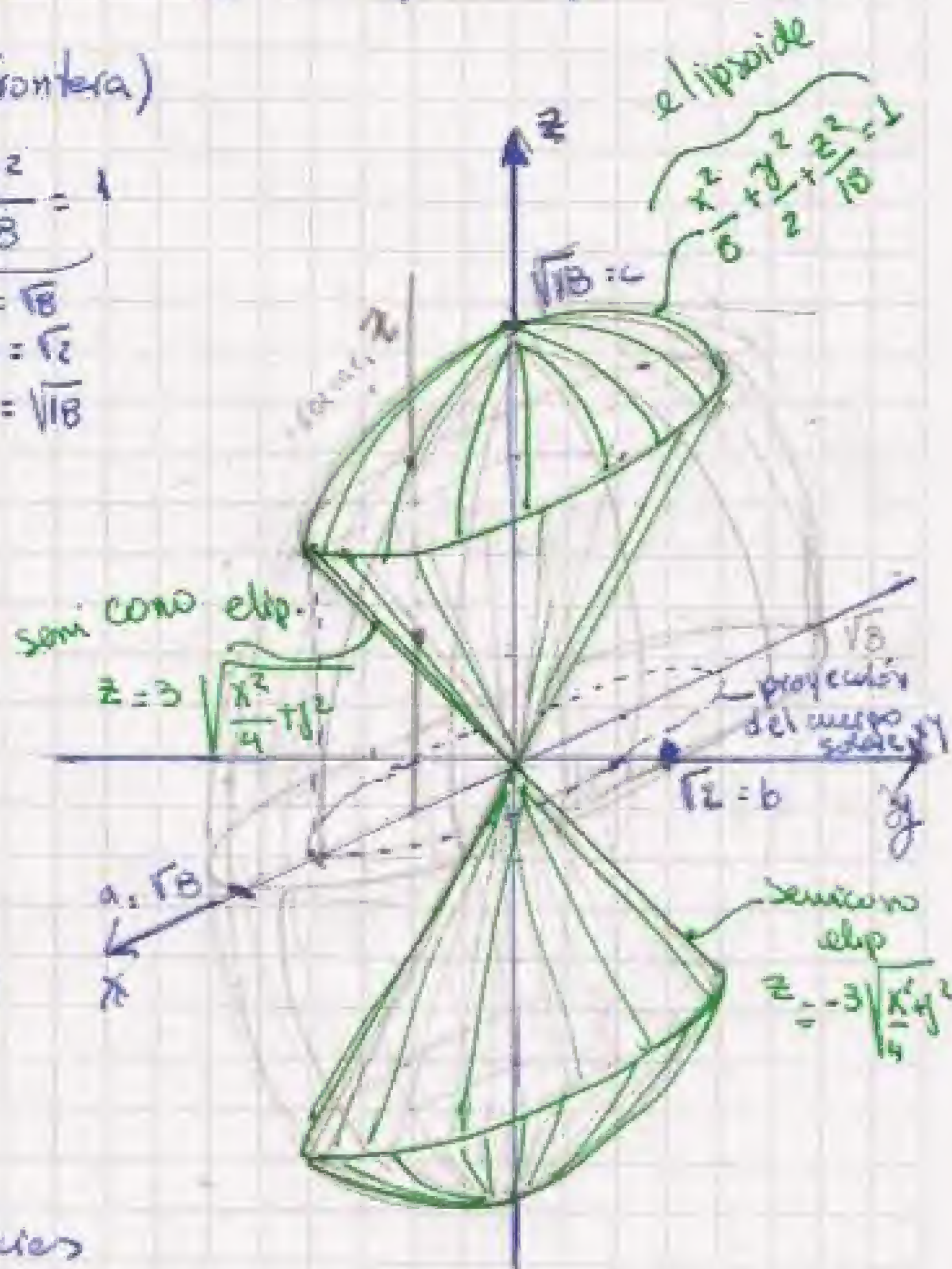
$$\bullet \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{z^2}{9} \rightarrow z^2 = 9 \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right)$$

$$\downarrow$$

$$|z| = 3 \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}$$

cono

Como Vol. de $W > 0 \rightarrow$ calculo el volumen que ocupa el cuerpo con $z \geq 0$ y después lo multiplico por 2.

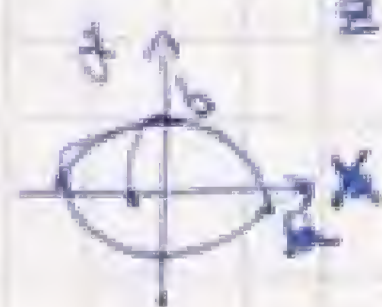


hallo la intersección de las dos superficies

para conocer su proyección sobre el plano xy , pues ya sé que z varía entre el semicono positivo (piso) y el elipsoide (techo)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 2 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{z^2}{9} \end{cases} \rightarrow \frac{z^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 2 \rightarrow z^2 = 9 \rightarrow z = |3| \rightarrow z = 3 \text{ (estoy estudiando } z \geq 0)$$

$$z = 3 \rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \rightarrow \text{elipse } \begin{matrix} a=2 \\ b=1 \end{matrix}$$



$z=3$



La elipse y su INTERIOR, en coordenadas polares es:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot r \cdot \cos(t) \\ y = r \cdot \sin(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, 1] \end{matrix}$$

$$3 \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2} \leq z \leq$$

semi cono

$$3 \sqrt{2 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right)}_{r^2}}$$

elipsoide

$$3r \leq z \leq 3\sqrt{2-r^2}$$

Jacobiano = $2r$

Cont. 4

Ahora voy a calcular la mitad del volumen (la parte superior) $\rightarrow z \geq 0$

$$\text{Vol} \textcircled{1} = \iiint_W 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{c. variable}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{3r}^{3\sqrt{2-r^2}} \underbrace{zr}_{\text{Jac.}} \, dz \, dr \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r (3\sqrt{2-r^2} - 3r) \, dr \, dt \stackrel{(2.3)}{=} 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\sqrt{2-r^2} - r^2) \, dr \, dt =$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} \sqrt{(2-r^2)^3} + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 dt = -2 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(2-r^2)^3} + r^3 \right) \Big|_0^1 dt =$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} 2 + \sqrt{8} \, dt = -4 + 4\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt = (-4 + 4\sqrt{2})(2\pi - 0) = 8\pi(-1 + \sqrt{2})$$

$$\therefore \boxed{\text{Vol. } W = 16\pi(-1 + \sqrt{2})}$$

b) Definir momento de inercia respecto del eje x de un sólido $M \subset \mathbb{R}^3$ con densidad volumétrica $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ρ integrable en M y M un conj. elemental de \mathbb{R}^3 .

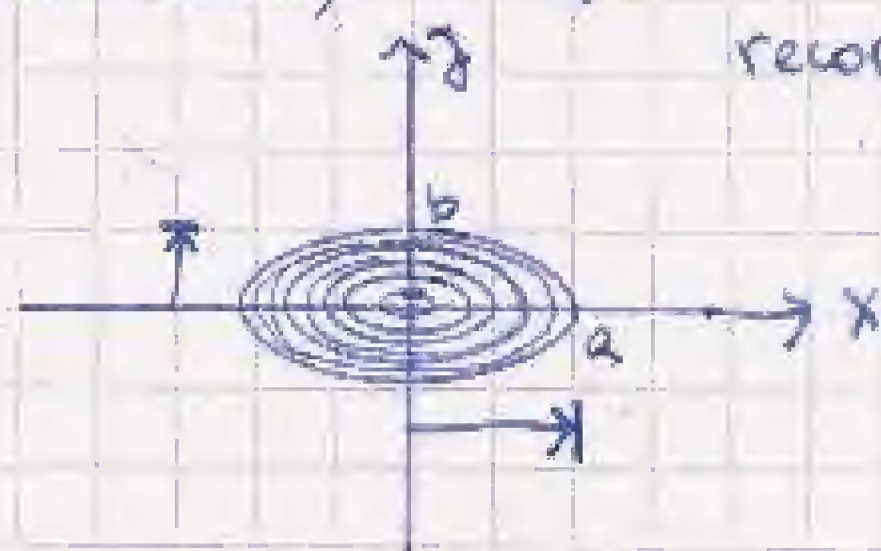
$$\boxed{I_x = \iiint_M (y^2 + z^2) \rho \, dx \, dy \, dz}$$

Aclaración sobre parametrización de elipse.

$$\text{Elipse (borde)}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \sigma(t) = (a \cos(t), b \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Disco elíptico (borde + interior)}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \rightarrow \sigma(t, r) = (ar \cos(t), br \sin(t)) \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, 1] \end{matrix}$$

recorre todas las elipses de 0 a ' a '
y de 0 a ' b '

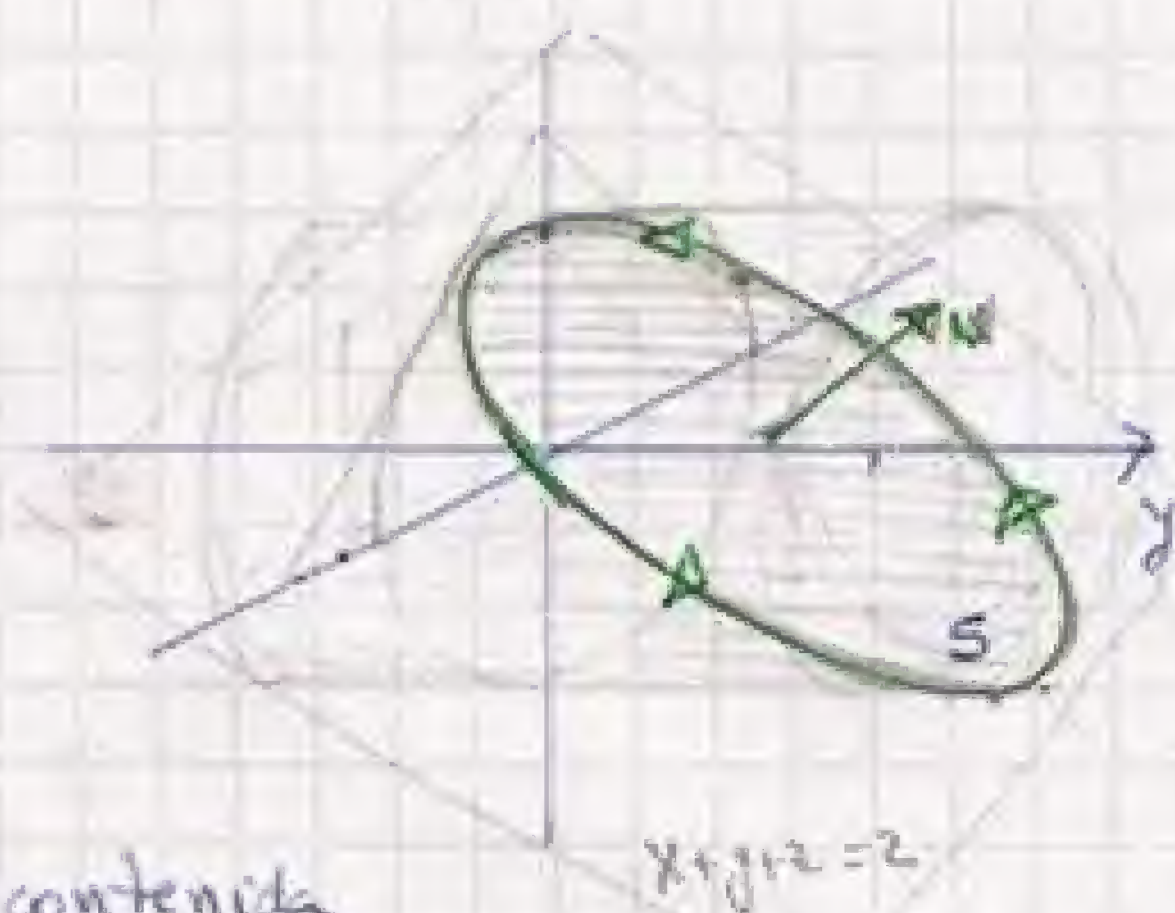


Jacobiano: $ab r$

- ⑤ Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y+z}, e^{x+z}, e^{x+y})$ a lo largo de la curva definida por las ecuaciones $x^2+z^2=2$ y $x+y+z=2$. Indicar, en un gráfico, la orientación utilizada.

Análisis la forma de la curva

$$C: \begin{cases} x^2+z^2=2 \rightarrow \text{cilindro con eje en el eje } y, \text{ radio } \sqrt{2} \\ x+y+z=2 \rightarrow \text{plano} \end{cases}$$



Como C es la curva intersección entre un cilindro y un plano, la curva está contenida en el plano, por lo tanto la superficie que encierra tiene la misma normal que el plano. $\therefore \underline{N=(1,1,1)}$

Como: S es una sup. suave orientable y $C^\infty \rightarrow C^2$ \nearrow plano \rightarrow polinomio $\rightarrow C^\infty$

• $C = \partial S$ es una curva suave, regular, orientada positivamente

• \vec{F} tiene sus componentes funciones exponenciales $\rightarrow \vec{F} \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow \vec{F} \in C^1(S)$

que son las hipótesis del teorema de Stokes, puedo decir que:

$$\oint_{C^+} \vec{F} d\vec{e} = \iint_S \text{rot} \cdot \vec{F} d\vec{S} = \iint_S \text{rot} \cdot \vec{F} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot ds = \iint_S \left(\begin{pmatrix} e^{y+z} - e^{x+z} \\ e^{x+z} - e^{x+y} \\ e^{x+y} - e^{y+z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\|\vec{n}\|} ds$$

$$= \iint_S \left(e^{x+y} - e^{x+z} + e^{y+z} - e^{x+y} + e^{x+z} - e^{y+z} \right) \frac{1}{\|\vec{n}\|} \cdot ds = \boxed{0 = \oint_{C^+} \vec{F} d\vec{e}}$$